

Priorità Strategiche Nazionali

incontro formativo per gli insegnanti

Laboratori sulla sezione aurea

Angelica Malaspina

Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia
Università degli Studi della Basilicata
angelica.malaspina@unibas.it

13 giugno 2023
I.I.S. "F. Petruccelli - G. Parisi", Moliterno
seminario on line



Matematica e Arte

- Il rapporto fra la Matematica e l'Arte non appare a prima vista evidente, ma gli intrecci e le convergenze fra queste due sfere della cultura umana sono stati nel corso della storia numerosi, profondi e fecondi.
- Considerata dagli stessi matematici una disciplina altamente creativa e non priva di qualità estetiche, nel corso dei secoli la matematica ha fornito alle arti visive strumenti e suggestioni.
- Molti artisti in epoche diverse hanno subito il fascino della matematica, e dalle sue idee, dalle sue tecniche e dalle sue forme hanno tratto ispirazione per le loro opere e i loro linguaggi.

Mateamtica ed Arte

L'arte e la matematica hanno da sempre dialogato tra loro e hanno molti elementi in comune. Una possibile classificazione di questi intrecci interdisciplinari può riguardare tre diversi livelli:

- la matematica come oggetto dell'arte,
- la matematica come linguaggio dell'arte,
- la matematica come struttura dell'arte.

A partire da queste considerazioni, è possibile proporre attività didattiche interdisciplinari tra queste due discipline.

La matematica come oggetto dell'arte

Le opere che rientrano in questa categoria sono realizzate da artisti che hanno effettivamente l'intenzione di rappresentare, ad esempio su tela o tramite una scultura, degli oggetti matematici.

Klee, P., Station L 112, 14 km, 1920, Rupf Stiftung, Berna.



La matematica come linguaggio dell'arte

Alcuni artisti si servono di figure ed elementi appartenenti alla matematica per realizzare le proprie opere, traducendole dal mondo astratto della matematica a quello concreto dell'arte.

Seurat, G., Una domenica pomeriggio all'isola della Grande Jatte, 1883–1885, Art Institute of Chicago.



La matematica come strumento dell'arte

Alcuni concetti propri della matematica, come per esempio la simmetria o la proporzione, aiutano l'artista a realizzare l'opera



La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione.

Augustus De Morgan (1806 – 1871)

Le forme create dal matematico, come quelle del pittore o del poeta, devono essere belle.

G. Harold Hardy (1806 – 1871)

La più alta categoria dell'intelletto immaginativo è sempre eminentemente la matematica.

Edgar A. Poe (1809 – 1849)

La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione.

Augustus De Morgan (1806 – 1871)

Le forme create dal matematico, come quelle del pittore o del poeta, devono essere belle.

G. Harold Hardy (1806 – 1871)

La più alta categoria dell'intelletto immaginativo è sempre eminentemente la matematica.

Edgar A. Poe (1809 – 1849)

La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione.

Augustus De Morgan (1806 – 1871)

Le forme create dal matematico, come quelle del pittore o del poeta, devono essere belle.

G. Harold Hardy (1806 – 1871)

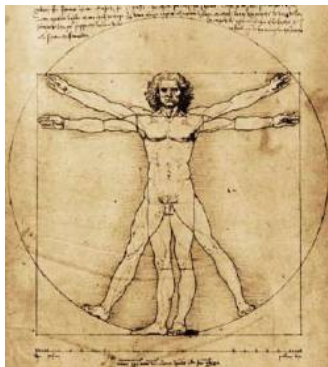
La più alta categoria dell'intelletto immaginativo è sempre eminentemente la matematica.

Edgar A. Poe (1809 – 1849)

La ricerca del bello

La simmetria risulta dalla proporzione. La proporzione è la commisurazione tra il tutto e le varie parti che lo compongono.

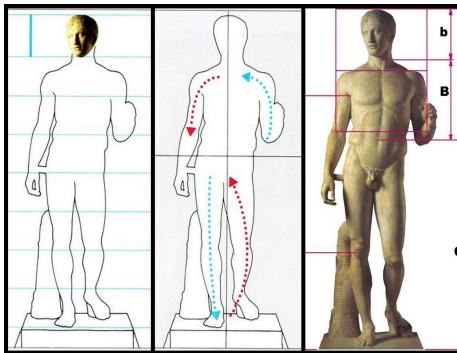
M. Vitruvio Pollione (80 – 23 a.C.), in De Architectura



Come si misura la bellezza

L'uso di molti numeri porterebbe la scultura alla perfezione.

Policleto di Argo (ca. 480 – 420 a.C.)



Fidia (490 – 430 a.C.)

Fidia fu l'artista chiamato da Pericle per costruire il Partenone. L'edificio ancora conserva, nonostante le distruzioni e le spoliazioni, tutto il fascino che gli viene da una struttura equilibrata e proporzionata, in un miracoloso accordo di misure geometriche esatte.



Definizione



La Sezione Aurea, φ , indica il rapporto fra due lunghezze disuguali, delle quali la maggiore è medio proporzionale tra la somma delle due e la minore.

$$(a + b) : a = a : b \quad \varphi = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$$

numero irrazionale (i.e. $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) algebrico (i.e. soluzione di un'equazione a coefficienti interi).

Anche poeticamente

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = 1,6180339887 \dots \quad \frac{1}{\varphi} = 0,6180339887 \dots \quad \varphi^2 = 2,6180339887 \dots$$

Media costante

La media aurea non è affatto banale

Tutt'altra cosa che un comune irrazionale.

Capovolta, pensate un po',

Resta se stessa meno l'unità.

Se poi di uno la aumentate

Quel che otterrete, vi assicuro, è il quadrato.[...]

Paul Bruckman (1977) in *The Fibonacci Quarterly*

Anche poeticamente

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = 1,6180339887 \dots \quad \frac{1}{\varphi} = 0,6180339887 \dots \quad \varphi^2 = 2,6180339887 \dots$$

Media costante

La media aurea non è affatto banale

Tutt'altra cosa che un comune irrazionale.

Capovolta, pensate un po',

Resta se stessa meno l'unità.

Se poi di uno la aumentate

Quel che otterrete, vi assicuro, è il quadrato.[...]

Paul Bruckman (1977) in *The Fibonacci Quarterly*

Altre sorprese

Consideriamo la seguente radice a struttura nidificata

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \varphi = \sqrt{1 + \varphi}$$

Dovunque mi fermi nella scrittura ciò che vedo è esattamente identico a quello che ho precedentemente scritto (autosomiglianza).

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Consideriamo la seguente frazione continua

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Media costante

Scritta come una frazione con continuità,

è uno, uno, uno, ..., fino a sazietà;

*Così chiara che più chiara alcuna non resta
(non vi comincia a girar un po' la testa?)*

Paul Bruckman (1977) in *The Fibonacci Quarterly*

Sulle potenze di φ

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \quad \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 \dots$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1 \quad \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = 2\varphi + 1 + \varphi + 1 = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = 3\varphi + 2 + 2\varphi + 1 = 5\varphi + 3 \dots$$

Una potenza intera qualsiasi di φ è uguale alla somma delle due precedenti, da cui

$$\varphi^2 = 1\varphi + 1 \quad \varphi^3 = (1+1)\varphi + 1 = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = (2+1)\varphi + 2 = 3\varphi + 2 \quad \varphi^5 = (3+2)\varphi + 3 = 5\varphi + 3 \quad \varphi^6 = 8\varphi + 5$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$\varphi^n = a_n\varphi + a_{n-1}$$

Problema dei conigli

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.

Leonardo da Pisa, detto Fibonacci in Liber Abaci (1223)

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144\}$$

Successione di Fibonacci

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \forall n \geq 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$

Problema dei conigli

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.

Leonardo da Pisa, detto Fibonacci in Liber Abaci (1223)

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144\}$$

Successione di Fibonacci

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \forall n \geq 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$

Cenni storici sul nome

- Conosciuto come rapporto non commensurabile dai pitagorici (500 a.C.).
- Euclide di Alessandria (300 a.C.) lo presenta in alcuni libri degli Elementi, come un numero che nasce dai pentagoni e decagoni.
- Tartaglia (1569): *una linea si dice esser diuisa seconda la proportion hauente il mezzo e duoi estremi quando che egliè quella medesima proportion di tutta la linea alla sua maggiore sectione che è della maggior sectione alla minore.* (Si dice che una retta è divisa in media e estrema ragione quando la lunghezza della linea totale sta a quella della parte maggiore come quella della parte maggiore sta a quella della minore).
- Luca Pacioli (1445 ca. – 1517) dedica interamente un'opera al rapporto aureo: *De Divina Proportione* ed interpreta la geometria, la filosofia, le scienze alla luce del rapporto aureo.
- Martin Ohm (1835) riferisce del termine sezione aurea (probabilmente ad introdurlo è stato Leonardo)
- Mark Barr (inizio del 1900) introduce il simbolo φ dall'iniziale di Fidia.

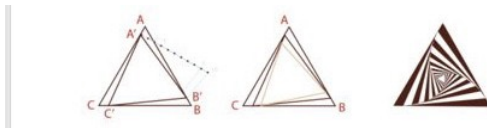
LABORATORI

Laboratori

- Laboratori motivazionali
- laboratori sul canone egizio ed il canone di Policleto
- scoperta e percezione (esperimento di Fechner) del numero aureo
- costruzioni con riga e compasso e costruzioni intuitive del rettangolo aureo e del triangolo aureo
- il pentagono regolare ed il pentagramma
- il problema dei conigli
- ricerca storica
- la sezione aurea nella fotografia
- costruzione della spirale aurea

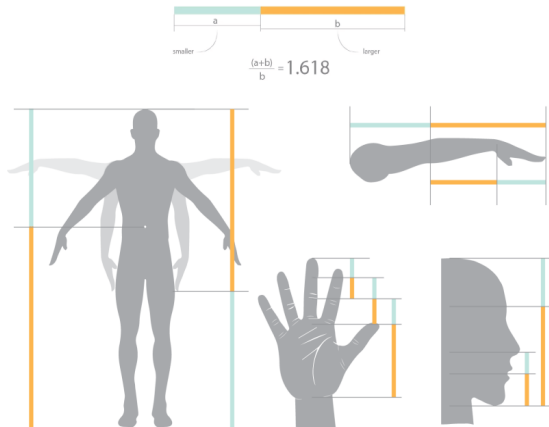
Laboratorio motivazionale introduttivo

- Matematica e Arte (senso, aspettative, luoghi comuni...) : scambio di opinioni anche mediante sondaggio.
- Dividere in piccoli gruppi gli allievi. Dopo aver costruito 4 cerchi, 4 quadrati e 4 triangoli, metterli insieme per formare una figura. Fare lo stesso con un elemento in meno.
- Costruzione di Grignani.

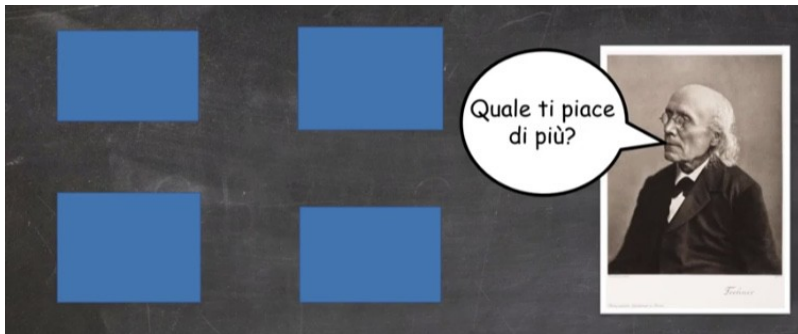


Laboratorio sulla sezione aurea

- scoperta del numero aureo



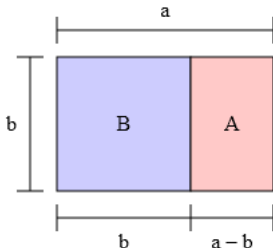
Esperimento di Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887)



Laboratori sulla sezione aurea

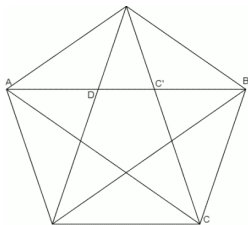
- Il rettangolo aureo è un rettangolo in cui il rapporto fra il lato maggiore e quello minore, è identico a quello fra il lato minore e il segmento ottenuto sottraendo quest'ultimo dal lato maggiore e tale rapporto vale φ :

$$a : b = b : (a - b) = \varphi$$



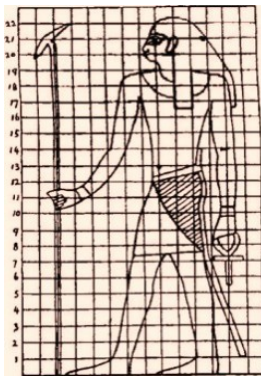
La sezione aurea nel pentagono regolare

La sezione aurea risulta peraltro strettamente connessa con la geometria del pentagono: in particolare il rapporto aureo è pari al rapporto fra la diagonale $\overline{AB}$ e il lato $\overline{BC}$, ma anche fra $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ (questo perché in un pentagono regolare il segmento maggiore delimitato dal vertice del pentagono e dall'intersezione con un'altra diagonale è congruente al lato) e fra $\overline{AC'}$ e $\overline{AD}$, e a sua volta $\overline{AD}$ e $\overline{DC'}$, etc., se immaginiamo che nel pentagono centrale possiamo iscrivere una nuova stella a cinque punte, la quale produrrà a sua volta un nuovo pentagono centrale, in cui ripetere l'iscrizione del pentagramma e così via, seguendo uno schema ricorsivo.



Laboratorio sul canone egizio

- ricerca delle proporzioni nei Bassorilievi Egiziani.



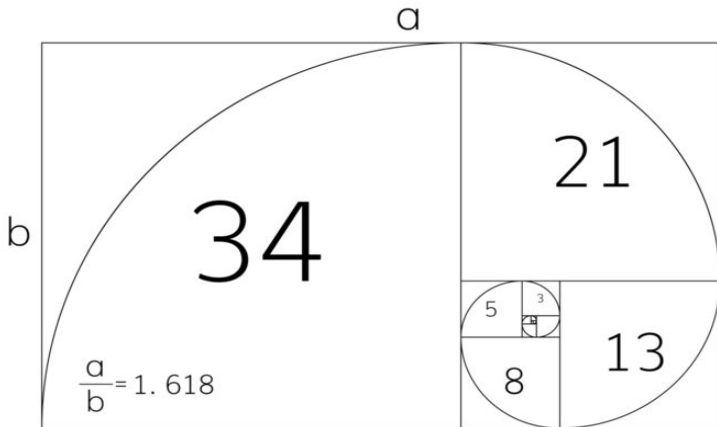
Disegno della spirale aurea

occorrente: foglio quadrettato, matita, righello, compasso.

- Disegniamo una successione di quadrati i cui lati rispettano i numeri di Fibonacci.
- Il primo quadrato avrà il lato di dimensione 1 unità.
- Il secondo quadrato avrà il lato sempre uguale a 1 unità, e sarà disegnato con un lato comune al primo.
- Il terzo quadrato, con il lato di 2 unità, andrà disegnato con un lato in comune ai primi due quadrati. Il quarto quadrato, con lato 3 unità andrà disegnato con un lato in comune al lato maggiore del rettangolo che si forma dall'unione dei tre quadrati precedenti.
- Continuando il disegno si otterrà così un rettangolo, la cui area sarà suddivisa in quadrati con le dimensioni che rispettano la successione di Fibonacci.
- Partendo dal primo quadrato disegnato, si uniscono 2 vertici con un arco, puntando il compasso su un terzo vertice dello stesso quadrato. Si passa poi al secondo quadrato e si ripete la stessa operazione, continuando per tutti i rimanenti quadrati.

Disegno della spirale aurea

occorrente: foglio quadrettato, matita, righello, compasso.



Qualche riferimento bibliografico

- Bruno D'Amore: Arte e Matematica, Edizioni Dedalo, 2018.
- Laura Catastini e Franco Ghione: Matematica e Arte, Springer Verlag, 2010.
- Mario Livio: La sezione aurea, BUR, 2003.

GRAZIE A TUTTI PER L'ATTENZIONE.