

Priorità Strategiche Nazionali

*La didattica della Matematica per il miglioramento degli esiti di apprendimento
e per il potenziamento dei saperi della disciplina*
Aula 2 Docenti Secondaria di I e II grado

Insegnare con GeoGebra

Angelica Malaspina

Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia
Università degli Studi della Basilicata
angelica.malaspina@unibas.it

07 giugno 2023 - I.I.S. Petruccelli-Parisi, Moliterno
incontro formativo per gli insegnanti - seminario on line



Introduzione

Quando i teoremi sono difficili, bisognerebbe insegnarli inizialmente come esercizi di disegno geometrico, finché la figura è divenuta del tutto familiare; allora sarà un passo avanti piacevole apprendere i legami logici tra le varie linee o i vari cerchi.

E' anche desiderabile che la figura illustrante un teorema venga disegnata in tutti i casi e in tutte le forme possibili, di modo che le relazioni astratte di cui la geometria si occupa possano venire in luce da se stesse, come portato logico delle somiglianze esistenti tra situazioni apparentemente tanto diverse. Le dimostrazioni astratte dovrebbero rappresentare dunque soltanto una piccola parte dell'istruzione, e dovrebbero essere date quando, attraverso la familiarità acquisita con gli esempi concreti, esse possono essere accolte come generalizzazioni naturali di fatti visibili.

Bertrand Russel, "Misticismo e logica", 1917

Uno strumento per insegnare

- GeoGebra è un software di **geometria dinamica** con cui si possono costruire figure attraverso dei comandi che permettono di collocare oggetti geometrici (punti, rette, segmenti, poligoni, cerchi, ecc.) su un piano. La caratteristica peculiare di GeoGebra, analoga a quella degli altri software di geometria dinamica diffusi in precedenza (Cabri-Géomètre in area europea, The GeometerSketchpad in area nord-americana), è la dinamicità. Le figure costruite possono infatti essere manipolate dinamicamente, non solo trascinate nel piano, ma anche modificate (nel senso di allargate, ristrette e quant'altro), mantenendone però invariato il protocollo di costruzione. Ovvero, se si è costruito un quadrato, pur modificandolo si vedrà sempre un quadrato, seppur girato o ingrandito, che mantiene le stesse proprietà con cui è stato costruito.



GeoGebra, un software per insegnare

- GeoGebra si colloca su un piano diverso rispetto agli altri software menzionati, in quanto è gratuito: è un software **open-source** che si sta diffondendo sempre di più oggi giorno nel mondo. GeoGebra cerca di andare oltre, rispetto ai software che lo hanno preceduto. Infatti, consente non solo la costruzione e la manipolazione di figure geometriche nel piano cartesiano, ma anche una buona gestione simbolica degli oggetti geometrici e l'integrazione con l'ambiente numerico (simile a quello di un foglio elettronico).
- I file costruiti con GeoGebra possono essere caricati sul web come applet dinamici interattivi e consentire alla comunità di utilizzarli e manipolarli pur senza aprire GeoGebra.



GeoGebra e Wikipedia

- Wikipedia (avviata nel 2001 da Jimmy Wales) è l'enciclopedia libera, gratuita, scritta e revisionata dalla comunità mondiale di utenti e navigatori del web.
- Il processo di costruzione e verifica collettiva della conoscenza rende l'avventura di Wikipedia molto simile a quella GeoGebra, il software che si avvale, dopo la sua nascita, della competenza di ricercatori e programmatori di tutto il mondo per evolvere e fornire non solo sempre nuove possibilità di uso agli utenti, ma anche nuove implementazioni su supporti diversi. Per esempio, da semplice software di geometria dinamica, oggi GeoGebra si è esteso per incorporare foglio di calcolo, strumento di manipolazione simbolico, visualizzazioni simultanee di diversi ambienti. Inoltre, si sta estendendo il suo uso, che non è solo più accessibile come download su computer, e ovviamente utilizzabile sulla LIM, ma anche di uso on-line, o come applicazione su tablet.



Nascita e sviluppo di GeoGebra

- Nel 2002 lo studente austriaco Markus Hohenwarter nella sua tesi di Laurea, crea un nuovo software che mette insieme i due ambienti: geometrico e algebrico. Nasce la prima versione di a GeoGebra.
- Ben presto GeoGebra conosce un grande sviluppo e un notevole successo. Viene tradotto in decine di lingue. Si può scaricare per PC e MAC, si può usare come APP su tablet e telefonini oppure si può usare la versione online.
- I motivi di maggiore successo di GeoGebra, oltre al fatto di coniugare ambiente geometrico e ambiente algebrico, nonchè ambiente simbolico, sono dovuti anche alla sua gratuità (free software), nonché alla possibilità di essere open-source ad accogliere contributi di sviluppatori di tutto il mondo.
- Punto di forza del software è la rete, in continua crescita a livello mondiale, dei GeoGebra Institute, organizzazioni a carattere non profit che riuniscono e mettono in collegamento tra loro insegnanti, studenti, sviluppatori di software e ricercatori con i seguenti obiettivi: creazione di materiale libero per l'insegnamento e la formazione degli insegnanti; seminari frontali e on-line per insegnanti; organizzazioni di competizioni per gli studenti; supporto on-line agli utenti; sviluppo di software.

Caratteristiche di GeoGebra

- La dinamicità, ottenuta tramite la funzione di trascinamento (dragging);
- la misura (di lunghezze di segmenti, di ampiezze di angoli, di aree di figure, ...);
- la traccia, il luogo, l'animazione (che consentono di vedere l'evoluzione di modelli);
- la rappresentazione di funzioni e l'indagine del loro grafico, a livello locale o globale;
- l'integrazione di registri di rappresentazione diversi (come quello geometrico e quello analitico), che consente di modellizzare situazioni problematiche.

GeoGebra nella ricerca dell'insegnamento della Matematica

- L'oggetto matematico può essere visto da uno studente in due modi diversi: come semplice figura (ossia facendo leva sugli aspetti percettivi di osservazione) oppure come figura legata a una teoria (cioè facendo leva sugli aspetti concettuali). Questa base teorica, formulata nell'ambito della psicologia da Fishbein (1993), ha permeato la ricerca sull'apprendimento della matematica, con e senza software (Laborde, 2004). Con il software si fa anche più pressante l'attenzione sugli studenti, in quanto la loro tentazione a fermarsi ai soli aspetti percettivi della figura è forte, perché il software offre non solo il disegno, ma anche una molteplicità di disegni ottenibili con il trascinamento. Se vogliamo quindi far passare il pensiero teorico, avviando alla dimostrazione (che è la base della struttura teorica della matematica), occorre agire nell'insegnamento con grande attenzione e sensibilità didattica.

Problema di costruzione

- Classico problema di geometria risalente agli antichi greci, che consiste nel costruire figure geometriche utilizzando riga e compasso, quindi basando la costruzione su proprietà e assiomi della geometria euclidea.
- GeoGebra può essere utilizzato in sostituzione della riga e del compasso, purché gli studenti siano consapevoli che non è sufficiente ottenere la figura richiesta, ma che questa figura, una volta trascinata (dragging), mantenga le stesse caratteristiche (cioè, per esempio, un quadrato continui ad essere un quadrato e non diventi un quadrilatero qualunque).
- Tale problema di costruzione può essere seguito dalla richiesta di spiegare perché la costruzione è stata fatta in un certo modo, e quindi giustificarla utilizzando la teoria (si entra qui nel mondo della dimostrazione).
- Esempio di problema di costruzione può essere il seguente: *Costruire la circonferenza che passa per il punto P ed è tangente alla retta l nel punto Q . Spiegare perché la figura ottenuta è proprio la circonferenza richiesta.*

Problema di esplorazione

- Può essere il classico problema di dimostrazione, in cui però non viene richiesto un compito del tipo “dimostra che...”, di fronte a cui la maggior parte di studenti pensa che sia necessario un lampo di genio per riuscire a trovare la dimostrazione. Ma si tratta di un problema formulato in modo aperto, che lascia la possibilità di esplorare una situazione geometrica, di formulare una congettura, di validarla e quindi di dimostrarla, una volta convenuto che non è sufficiente vedere con il software che una certa tesi funziona, ma che bisogna giustificarla nel sistema teorico.
- La potenzialità dei problemi aperti è che essi favoriscono una vasta produzione matematica, nel senso che tutti gli studenti riescono a trovare soluzioni, più o meno complesse, relative alla situazione che stanno esplorando.
- Il ruolo della dimostrazione è poi quello di precisare come le proprietà scoperte, formulate mediante le congetture prodotte, possano essere dedotte dagli assiomi della teoria considerata, in questo caso la geometria euclidea.

Problema di modellizzazione

- Quello in cui si chiede di determinare il massimo o il minimo di una certa grandezza, oppure di studiare come varia una grandezza in funzione di un'altra. Anche qui, come nei precedenti tipi di problemi, occorre una rivisitazione del tipo di problema nella sua forma tradizionale, in quanto, anziché buttarsi sui conti, gli studenti possono visualizzare la situazione tramite una sua rappresentazione grafica, integrata magari da rappresentazioni numeriche (tabelle numeriche di dati), o simboliche (formule).

Nelle indicazioni Nazionali

- *Riprodurre una figura in base ad una descrizione utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria). Obiettivi di apprendimento al termine della V Primaria.*
- *Riprodurre figure e disegni geometrici utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria). Obiettivi al termine della III classe della Scuola Secondaria di Primo grado.*

Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei

- la realizzazione di costruzioni geometriche tradizionali sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali sia mediante programmi informatici di geometria,
- lo studente sarà in grado di passare da un registro di rappresentazione ad un altro (numerico, grafico, funzionale) anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati,
- costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo,
- gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivela opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche.

Pedagogia degli strumenti tecnologici

- L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale. L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi
- Appare evidente quanto GeoGebra metta in gioco contemporaneamente insegnanti e studenti, con domande diverse a seconda dei ruoli svolti in questo gioco, ma con obiettivi comuni. Innanzitutto oggi possiamo dire che nelle scuole italiane vi è una forte evoluzione riguardante la strumentazione tecnologica presente nelle aule e nei laboratori. Questa evoluzione ormai irreversibile pone ad insegnanti e studenti domande sull'uso e sulla pedagogia del mezzo tecnologico.

Geogebra come strumento pedagogico

- L'utilizzo di GeoGebra diventa un forte strumento pedagogico che di conseguenza non predilige specifici temi e non predilige archi di età particolari a cui rivolgersi. Infatti gli studenti possono utilizzare GeoGebra non solo per la visualizzazione ma soprattutto per fare congetture, per ricercare elementi di una dimostrazione, per argomentare e convincere altri delle proprie idee.
- Naturalmente è facile trovare da parte degli insegnanti alcuni scetticismi oltre che facili entusiasmi. Il problema del tempo a disposizione è infatti uno dei problemi reali già presente nelle su citate Indicazioni Nazionali e i tempi per imparare a utilizzare GeoGebra potrebbero essere non del tutto brevi, così come l'utilizzo di GeoGebra per sviluppare una dimostrazione da parte di studenti potrebbe indurli a seguire strade diverse da quelle previste nelle dimostrazioni. Ma come sempre i rischi possono tramutarsi in risorse perché nel momento in cui gli studenti possono deviare da quelli che sono i percorsi decisi dell'insegnante per giungere a dei risultati, si possono creare situazioni positive, soluzioni inaspettate, insomma lo studente potrebbe tendere a comportarsi da matematico.
- GeoGebra diventa così non solo un forte strumento metodologico per il problem solving ma anche e forse soprattutto per il problem posing: lo studente nell'ottica di un pensiero divergente potrebbe favorire domande del tipo "e se fosse?"

GeoGebra risolve il problema dell'insegnamento della Matematica?

- L'uso di GeoGebra, come l'uso di altri software didattici, non è e non può essere la soluzione ai problemi di insegnamento di geometria e di algebra ma, d'altro canto esso può essere un ottimo valore aggiunto per alcuni particolari temi dell'insegnamento della geometria e dell'algebra. Se pensiamo infatti per esempio all'attività già citata del *dimostrare* sappiamo come questa attività soprattutto nell'ambito del primo biennio della Scuola Secondaria di Secondo grado e nello sviluppo della geometria euclidea presenti notevoli ostacoli di comprensione e di perdita di significato dovuta anche alla giovane età degli studenti. GeoGebra invece può aiutare a cogliere il senso, ma anche il valore del *dimostrare* in geometria.

Integrare GeoGebra

- Scaricato e installato il software open-source dal sito www.geogebra.org, all'insegnante che intende integrarne l'uso nella sua pratica didattica spetta il compito di sfruttarlo al meglio.
- L'obiettivo, non banale, è quello di creare ambienti di apprendimento significativi in cui gli studenti si possano scontrare con problemi aperti e intriganti e, agendo come matematici, costruire il loro bagaglio personale di conoscenze, competenze e attitudini matematiche significative, stabili e trasferibili.
- Ma perché l'insegnante possa creare tali ambienti di apprendimento significativi ed efficaci è necessario che sia consapevole dell'utilità di GeoGebra come strumento metodologico.

Riferimenti alle Indicazioni Ministeriali e alle linee guida

- Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.
- Lo studente apprenderà i principi matematici di base coinvolti nelle diverse tecniche di rappresentazione delle figure dello spazio e le relazioni tra di essi e le tecniche in uso nelle discipline grafiche e geometriche (Indicazioni nazionali per i Licei).
- Lo studente apprenderà a: confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni; analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico (per Istituti Tecnici e Professionali)

Link utili

- **GeoGebra** www.geogebra.org
 - Pacchetto di geometria dinamica, algebra ed analisi
 - Eseguitibile su qualsiasi computer, disponibile in 35 lingue
- **GeoGebraWiki** www.geogebra.org/wiki
 - Raccolta di fogli di lavoro dinamici sviluppati da insegnanti
- **GeoGebraForum** www.geogebra.org/forum
 - La comunità degli utenti ed entusiasti sostenitori
- **International GeoGebra Institute** www.geogebra.org/IGI
 - Offre formazione gratuita agli insegnanti
 - Rilascia la certificazione GeoGebra
 - Centro di ricerca

- Pierangela Accomazzo, Silvia Beltramino, Ada Sargenti, *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*, Ledizioni, 2013.

Grazie per l'attenzione

